

Cuprinsul

I	Logică matematică clasică (prezentare neformalizată)	11
1	Calculul propozițiilor (neformalizat)	15
1.1	Propozițiile	15
1.2	Valoarea de adevăr a unei propoziții	17
1.2.1	Propoziții adevărate sau false	17
1.2.2	Tautologiile	20
1.2.3	Algebra Lindenbaum-Tarski	24
1.2.4	Observații	28
2	Calculul predicatelor (neformalizat)	29
2.1	Predicatele	29
2.1.1	Domeniul unui predicat	30
2.1.2	Propoziții (enunțuri) complexe	31
2.2	Valoarea de adevăr a unui predicat	34
2.2.1	Tautologii. Tautologii cuantificate	34
2.2.2	Observații	39
II	Algebre Boole	41
3	Latici	45
3.1	Mulțimi (pre)ordonate	45
3.1.1	Definiții. Exemple	45
3.1.2	Principiul dualității. Diagrama Hasse	46
3.1.3	Prim (ultim) element, minorant (majorant), infimum (supremum). Axioma lui Zorn	47
3.2	Latici	50
3.2.1	Latici Ore și latici Dedekind. Echivalența lor	50
3.2.2	Principiul dualității pentru latici	54
3.2.3	Exemple de latici	54
3.2.4	Latici distributive. Latici mărginite complementate	57
3.2.5	Morfisme de latici mărginite	60

4	Algebre Boole	61
4.1	Algebre Boole: definiție, exemple, proprietăți	62
4.1.1	Definiția 1 a algebrelor Boole	62
4.1.2	Proprietăți ale algebrelor Boole	62
4.1.3	Implicația și echivalența booleană. Dualele lor	63
4.1.4	Exemple de algebre Boole	65
4.2	O definiție echivalentă a algebrelor Boole	67
4.2.1	Definiția 2 a algebrelor Boole	68
4.2.2	Axiomele (B1) - (B7) implică (A1) - (A4)	69
4.2.3	Axiomele (A1) - (A4) implică (B1) - (B7)	69
4.2.4	Aplicațiile α și β sunt mutual inverse	74
4.2.5	Principiul dualității pentru algebre Boole	75
4.3	Inele Boole. Echivalența cu algebrele Boole	76
4.3.1	Inele Boole	77
4.3.2	Echivalența algebre Boole - inele Boole	77
4.4	Subalgebre, homomorfisme	78
4.4.1	Subalgebre. Exemple	78
4.4.2	Homomorfisme. Exemple	79
4.5	Algebre Boole cât	81
4.5.1	Filtre (ideale) și sisteme deductive	81
4.5.2	Congruențe. Corespondența filtre - congruențe	83
4.5.3	Algebre Boole cât	85
4.5.4	Filtre generate de o mulțime	88
4.6	Teorema de reprezentare a lui Stone	89
4.6.1	Ultrafiltre (= filtre maximale)	90
4.6.2	Teorema de reprezentare a lui Stone	91
4.7	Algebre Boole atomice	92
4.8	Dualitatea algebrelor Boole	95
4.9	Algebre Boole injective	99
4.10	Filtre fuzzy ale unei algebre Boole	104
4.10.1	Mulțimi fuzzy	104
4.10.2	Filtre fuzzy ale unei algebre Boole	106

III Elemente de teoria mulțimilor 109

5	Algebra Boole a mulțimilor	115
5.1	Mulțimea și apartenența: concepte fundamentale	115
5.2	Relația de incluziune și relația de egalitate	116
5.2.1	Relația de incluziune între mulțimi (clase)	116
5.2.2	Relația de egalitate între mulțimi	117
5.3	Operații cu mulțimi. Algebra Boole a mulțimilor	118
5.3.1	Reuniunea și intersecția a două mulțimi. Complementara unei mulțimi. Algebra Boole a mulțimilor	118

5.3.2	Funcția caracteristică a unei mulțimi	121
5.3.3	Generalizare: reuniunea și intersecția a n mulțimi	121
5.3.4	Generalizare: reuniunea și intersecția unei familii de mulțimi	122
6	Algebra relațională a relațiilor	123
6.1	Produs cartezian a două mulțimi. Relații binare	123
6.1.1	Produs cartezian a două mulțimi	123
6.1.2	Relații binare	124
6.2	Produsul cartezian a n mulțimi. Relații n -are	125
6.2.1	Produs cartezian a n mulțimi ($n \geq 2$)	125
6.2.2	Relații n -are ($n \geq 2$)	126
6.3	Operații cu relații. Algebra Boole a relațiilor	127
6.3.1	Disjuncția, conjuncția și negația unei relații binare	127
6.3.2	Implicația și echivalența relațiilor binare	128
6.3.3	Algebra Boole a relațiilor	129
6.3.4	Matricea booleană (caracteristică) a unei relații binare pe o mulțime finită	129
6.4	Algebra relațională a relațiilor	131
6.4.1	Compunerea și inversarea relațiilor binare	131
6.4.2	Algebra relațională a relațiilor binare	134
6.5	Baze de date relaționale	136
6.5.1	Reprezentarea relațiilor. Definiții	136
6.5.2	Limbaje de prelucrare a datelor	138
IV	Logică matematică clasică (prezentare formalizată)	139
7	Sistemul formal al calculului propozițional	141
7.1	Introducere. Exemple de reprezentări simbolice	142
7.2	Sintaxa și algebra calculului propozițional	145
7.2.1	Axiome, teoreme și demonstrații formale	147
7.2.2	Deducția formală din ipoteze și Σ -demonstrația formală	148
7.2.3	Proprietăți sintactice ale lui L . Teorema deducției	149
7.2.4	Sistem deductiv	160
7.2.5	Mulțimi consistente	161
7.2.6	Algebra Lindenbaum-Tarski a calculului propozițional	164
7.2.7	Algebrele Boole ca algebre "tip Lindenbaum-Tarski"	172
7.3	Exemple de deducții formale din ipoteze	178
7.4	Semantica calculului propozițional	186
7.4.1	Interpretare. Modele. Deducția semantică din ipoteze	186
7.4.2	Teorema de completitudine	189
7.4.3	Teorema de completitudine extinsă	190
7.5	T. de completitudine extinsă versus t. lui Stone	192

8	Sistemul formal al calculului cu predicate	195
8.1	Structuri și limbaj	197
8.1.1	Structuri de ordinul I	197
8.1.2	Limbajul de ordinul I, L_τ	199
8.2	Sintaxa și algebra calculului cu predicate	203
8.2.1	Axiome, teoreme și demonstrații formale	203
8.2.2	Deductia din ipoteze și Σ -demonstrația formală. Teorema deducției	210
8.2.3	Mulțimi (teorii) consistente	212
8.2.4	Algebra Lindenbaum-Tarski a calculului cu predicate	213
8.2.5	Algebre Boole monadice, poliadice și cilindrice	216
8.3	Semantica calculului cu predicate	219
8.3.1	Interpretare. Modele	219
8.3.2	Constante noi	224
8.3.3	Enunțuri. Formule universal adevărate	226
8.3.4	Deductia semantică din ipoteze	228
8.3.5	Exemple de enunțuri universal adevărate	230
8.4	Teorema de completitudine extinsă. Modele Henkin	235
8.5	Cum se stabilește dacă o formulă este teoremă formală	244
V	Logică matematică clasică și probabilități	247
9	Probabilități pe algebre Boole	251
9.1	Evenimente și probabilități	251
9.2	Proprietăți ale probabilităților	253
9.3	σ -algebre și σ -probabilități	256
9.3.1	σ -algebre	256
9.3.2	σ -probabilități	258
9.4	Teorema lui Carathéodory	259
9.5	Teorema Horn-Tarski	265
10	Modele probabiliste ale calc. cu predicate	269
10.1	Structuri probabiliste	269
10.2	Teorema de completitudine a lui Gaifman	274
10.3	Către o teorie a modelelor probabiliste	276
10.3.1	Pereche consistentă cu o probabilitate	277
10.3.2	Substructuri	277
10.3.3	Teorema lanțului elementar	278
10.3.4	Păstrarea probabilităților la substructuri	281
10.3.5	O variantă probabilistă a teoremei lui Robinson	284
	Bibliografie	287
	Index	295
	Lista figurilor	299