

DINAMICA ECONOMICĂ

**DE LA DINAMICA LINIARĂ LA BIFURCAȚII,
ATTRACTORI STRANII ȘI HAOS**



ACADEMIA DE STUDII ECONOMICE DIN BUCUREȘTI

**Facultatea de Cibernetică, Statistică
și Informatică Economică**

Catedra de Cibernetică Economică

Prof. univ. dr. Gheorghe OPRESCU

DINAMICA ECONOMICĂ

**DE LA DINAMICA LINIARĂ LA BIFURCAȚII,
ATTRACTORI STRANII ȘI HAOS**

**Editura ASE
București
2006**

Copyright © 2006, Editura ASE

Toate drepturile asupra acestei ediții sunt rezervate editurii.

Editura ASE

Piața Romană nr. 6, sector 1, București, România

cod 010374

www.ase.ro

editura@net.ase.ro

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

OPRESCU, GHEORGHE

Dinamica economică : de la dinamica liniară la bifurcații, atractori stranii și haos / Gheorghe Oprescu. – București : Editura ASE, 2004

Bibliogr.

ISBN (10) 973-594-827-3 ; ISBN (13) 978-973-594-827-6

33

ISBN (10) 973-594-827-3 ; ISBN (13) 978-973-594-827-6

Editura ASE

Redactor: Silvia Răcaru

Tehnoredactare computerizată: Mioara Gamulea

Coperta: Livia Radu

CUPRINS

Introducere	17
1. Cadrul conceptual.....	17
2. Bazele analizei dinamicii liniare	19
<i>Sisteme dinamice liniare continue</i>	19
<i>Sisteme dinamice liniare discrete</i>	21
3. Rezultate în analiza dinamicii neliniare	23
4. Structura lucrării.....	27
 Capitolul 1	
1. DINAMICA LINIARĂ	32
1.1 Modele dinamice ale mecanismelor	
de reglare cerere-ofertă pe piața bunurilor	33
1.1.1 Funcționarea mecanismelor de reglare în formarea prețurilor	
pe piața unui produs	33
1.1.1.1 Modelul Kaldor	33
1.1.1.2 Extensii. Modelul Kaldor cu anticipări adaptive.....	37
1.1.1.3 Modelul Kaldor cu anticiparea prețurilor (de tip Goodwin).....	43
1.1.1.4 Aplicații numerice	46
1.1.2 Analiza dinamicii mecanismelor feedback	
în stabilitatea echilibrului cerere-ofertă	51
1.1.2.1 Echilibrul parțial cerere-ofertă pe piața unui singur produs	51
a) Stabilitate statică	52
a.1) Stabilitatea statică în sens Walras (SSW)	52
a.2) Stabilitatea statică în sens Marshall (SSM)	54
a.3) Aplicații: Cazul funcțiilor de cerere și oferta liniare	55
1.1.2.2 Stabilitatea dinamică a echilibrului cerere – ofertă	57
b.1) Stabilitatea dinamică în sens Walras (SDW)	57
b.2) Stabilitatea dinamică în sens Marshall (SDM)	61
1.1.2.3 Aplicații numerice: Studii de caz.....	66
1.1.3 Echilibrul global cerere – ofertă. Modelul Hicks al prețurilor pe m piețe	73
1.1.3.1 Stabilitatea statică în sens Hicks.....	74
a.1) Stabilitatea statică imperfectă (SSI).....	74
a.2) Stabilitatea statică perfectă	77
1.1.3.2 Stabilitatea dinamică globală cerere - ofertă	79
b.1) Ecuația de dinamică Hicks a prețurilor	79
b.2) Aplicații. Studiu de caz.....	81
b.3) Stabilitatea dinamică în sens Samuelson.....	84
b.4) Legătura cu coeficienții Slutsky.....	85
b.5) Stabilitatea dinamică în sens Metzler	86
1.1.3.3 Aplicații numerice	86
1.1.3.4 Cercetăm cerințele stabilității dinamice (în sens Hicks)	88
1.2 Modele dinamice liniare multiplicator accelerator:	
cicluri economice.....	92
1.2.1 Modelul Hicks	94
1.2.1.1 Evoluția produsului național, investițiilor și consumului.....	96
1.2.1.2 Condiții de stabilitate și echilibru	99
1.2.1.3 Studiu de caz și aplicații propuse	100

1.2.1.4 Analiza fluctuațiilor ciclice în economia reală cu ajutorul modelului Hicks	103
a.1) Ecuația dinamicii deviațiilor relative de la echilibru	103
a.2) Evoluția plafonată	104
a.3) Dinamica stocului de capital și a amortizării	108
a.4) Algoritm de aplicare practică	110
1.2.1.5 Modelul Hicks cu întârzieri distribuite	112
1.2.1.6 Studiu de caz și aplicații	117
1.2.2 Modelul Samuelson	123
1.2.2.1 Evoluția principalilor indicatori. Condiții de stabilitate și echilibru	123
1.2.2.2 Analiza fluctuațiilor ciclice în economia reală cu ajutorul modelului Samuelson	126
1.2.2.3 Modelul Samuelson cu întârzieri distribuite	127
1.2.2.4 Aplicații propuse.....	128

Capitolul 2

2. CARACTERISTICI FUNDAMENTALE ALE DINAMICII SISTEMELOR NELINIARE UNIDIMENSIONALE	131
2.1 Modele dinamice discrete.....	132
2.1.1 Puncte fixe	133
2.1.2 Natura punctelor fixe. Criterii de stabilitate	133
2.1.3 Cicluri limită. Bifurcații. Stabilitatea ciclurilor limită	135
2.2 Modele dinamice continue	139
a) Puncte fixe; criterii de stabilitate.....	139
b) Cicluri limită; criterii de stabilitate	140
2.3 Simularea evoluției.....	140
2.4 Aplicații: Modelul logistic (Verhulst)	141
2.4.1 Modelul continuu.....	141
2.4.2 Modelul discret (logistic map).....	145
a) Reprezentarea în spațiul fazelor: diagrama Cobweb	145
b) Puncte fixe de tip atractor	146
c) Cicluri limită stabile.....	147
d) Diagrama Feigenbaum.....	151
e) Metoda dinamicii simbolice: Shift map	153
2.5 Aplicații economice.....	157
2.5.1 Modelul logistic al profitului (Stacey).....	157
2.5.2 Modelul Stutzer al creșterii economice: Haavelmo – Stutzer	158
a) Analiza dinamicii pentru elasticitatea $E_L = 0.5$	159
b) Anexă	161
2.6 Caracteristici cantitative ale comportamentului haotic.....	164
2.6.1 Principalele cerințe pentru un comportament haotic.....	164
2.6.2 Evoluția aparent aleatoare (cvasialeatoare) a sistemului analizat	167
2.6.3 Proprietatea SCI.....	169
2.6.4 Spectrul de putere Fourier. Anexă. Reprezentarea spectrală a semnalelor de bandă finită sau infinită a frecvenței	169
a) Reprezentarea prin serii Fourier trunchiate	175
b) Reprezentarea armonică a seriei Fourier.....	177
2.6.5 Exponenții Lyapunov.....	179
a) Exponentul Lyapunov pentru procese unidimensionale.....	179

b) Estimarea exponentului Lyapunov.....	181
c) Exponentul Lyapunov; stabilitatea, bifurcații, instabilitate.....	182
d) Bifurcația tangentă: rute intermitente către haos	184
2.6.6 Ergodicitatea.....	186
2.6.7 Cicluri economice și haos: modelul accelerator multiplicator Hicks neliniar...	187
a) Investițiile și mecanismul accelerator neliniar	188
b) Modelul Hicks accelerator – accelerator neliniar.....	191
c) Modelul Hicks neliniar rescalat	194
d) Exponentul Lyapunov și existența „ferestrelor” de comportament ordonat în dezordinea haotică	204
e) Analiza formală: dinamica simbolică.....	204
f) Analiza comparativă cu mișcarea browniană aleatoare	205
2.7 Existența ciclurilor pe perioadă stabilă. Teoreme de bază	207
2.7.1 Teorema Singer.....	207
2.7.2 Teorema Sarkowsky	209
2.7.3 Teorema Li – Yorke. Definiția haosului	210
2.8 Anexe: Simulări	212
2.8.1 Simularea modelului Haavelmo – Stutzer pentru $\alpha=4.4$; $x_0=0.68$; $n=100$ iterații	212
2.8.2 Calculul estimatorului exponentului Lyapunov pentru modelul Haavelmo – Stutzer cu $a=4.4$; $n=100$ iterații.....	213
2.8.3 Simularea modelului Hicks neliniar pentru $\alpha=2,4$ și $z_0=0.68$; $n=100$ iterații.....	215

Capitolul 3

3 ANALIZA DINAMICII SISTEMELOR CONTINUE UNI

ȘI BIDIMENSIONALE NELINIARE.....	219
3.1 Metode cantitative în analiza dinamicii sistemelor continue neliniare	219
3.2 Echivalența sistem autonom – sistem neautonom	220
3.3 Sisteme unidimensionale: diagrama fazelor	221
3.4 Sisteme continue bidimensionale: reprezentarea în spațiul (planul) fazelor	226
3.4.1 Planul fazelor: traiectorii (drumuri) de fază.....	226
3.4.2 Puncte staționare în spațiul (planul) fazelor.....	231
3.4.3 Puncte staționare multiple. Separatrix, orbite homocline, orbite heterocline ...	235
3.4.4 Reprezentarea grafică a curbelor izokine.....	237
3.4.5 Identificarea versorilor direcțiilor de mișcare.....	239
3.4.6 Traectoria sistemului în spațiul (planul) fazelor	241
3.5 Tehnici cantitative de analiză a stabilității sistemelor bidimensionale	243
3.5.1 Diagrama $\text{Tr } J - \det J$. Teorema Olech	243
3.5.2 Cazul $\text{Tr } J = 0$. Cicluri închise („orbită”).....	245
3.5.3 Stabilitatea neasimptotică: ciclu limită stabil. Teorema Poincaré – Bendixon (T.P.B.).....	249
3.5.4 Exemplu ilustrativ: analiză în coordonate polare. Aplicarea T.P.B.	251
3.5.5 Puncte șa: $\det J < 0$ în diagrama $\text{Tr } J - \det J$	256
3.6 Cicluri limită. Teoreme de existență	258
3.6.1 Teorema de stabilitate orbitală.....	258
3.6.2 Teorema 2 (Nemitzky).....	259
3.6.3 Criteriul negativ Bendixon	260

3.6.4 Cicluri limită: teoria oscilatorului – de la ecuația Van der Pol – Georgescu - Roegen, la ecuația Liénard.....	261
3.7 Stabilitate globală: Metode (a doua) Lyapunov	263
3.8 Studiu de caz. Stabilitatea unei piețe: modelul dinamic Walras – Marshall neliniar.....	265
3.8.1 Formularea modelului.....	265
3.8.2 Aplicarea criteriului Nemitzky	268
3.8.3 Analiza grafică în spațiul fazelor	269
3.8.4 Metoda a doua Lyapunov	270
3.9 Anexa 1. Câteva tipuri de curbe integrale ale traiectoriilor sistemelor bidimensionale în spațiul fazelor.....	271
3.9.1 Ecuații diferențiale omogene (E.D.O.)	272
3.9.2 Ecuații reducibile la E.D.O.	272
3.9.3 Aplicații ilustrative	275
3.9.4 Ecuațiile Lotka – Volterra.....	276
A. Formularea modelului	276
B. Trasarea graficului. Cicluri închise	276
C. Traectorii orbitale și puncte șa	279
3.10 Anexa 2. Organizarea spațiului stărilor ca spațiu metric. Distanțe. Norme.	282

Captiolul 4

4 ELEMENTE DE TEORIA BIFURCAȚIILOR	285
4.1 Bifurcații ale traiectoriilor sistemelor dinamice neliniare continue unidimensionale	285
4.1.1 Bifurcația „fold” (puncte șa – nod).....	287
4.1.2 Bifurcații transcritice	290
4.1.3 Bifurcații „furcă” („pitch fork”)	293
4.2 Bifurcații ale traiectoriilor sistemelor dinamice discrete unidimensionale.....	300
4.2.1 Bifurcația „fold”	300
4.2.2 Bifurcația transcritică	302
4.2.3 Bifurcația „pitch fork” (furcă)	302
4.2.4 Bifurcația „flip”	302
4.2.5 Studii de caz: aplicații ilustrative.....	304
4.3. Bifurcațiile în sistemele dinamice continue bidimensionale	311
4.3.1 Bifurcația Hopf: studiu de caz ilustrativ	312
4.3.2 Teorema de existență a bifurcației Hopf.....	315
4.3.3 Bifurcația globală: puncte șa – nod	318
4.3.4 Studiu de caz: Echilibrul IS – LM: Condiții de stabilitate dinamică. Bifurcații Hopf.....	322
4.4 Bifurcații în sistemele dinamice continue tridimensionale.....	328
4.4.1 Bifurcația Neimarck	328
4.4.2 Studiu de caz: Dinamica IS – LM cu o politică monetară pură de finanțare a deficitului bugetar: Bifurcația Neimarck	330
4.5 Bifurcația Hopf în traiectoriile sistemelor dinamice discrete bidimensionale	335
4.6 Aplicație. Creșterea economică și poluarea mediului. Funcția de producție Cobb – Douglas Day (CDD).....	336
4.6.1 Axiomatica modelului	336
4.6.2 Analiza dinamicii: Bifurcații „flip”, cicluri stabile, emergența spre haos.....	338

4.6.3 Studiul de caz I : $\alpha=\beta=1$	338
4.6.4 Studiul de caz II : $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$	345

Capitolul 5

5 ANALIZA DINAMICII SISTEMELOR MULTIDIMENSIONALE.....	349
5.1 Sisteme dinamice tridimensionale continue	349
5.1.1 Metode analitice de cercetare a dinamicii. Anexă: Formulele lui Cardan	350
5.1.2 Tipologia punctelor staționare în R^3	352
5.1.3 Reducerea dimensiunii: secțiunea Poincare	353
5.1.4 Bifurcații în R^3	355
5.1.5 Atractor straniu. Comportament haotic.	365
5.2 Aplicație ilustrativă: Modelul Lorenz	366
5.2.1 Punctele staționare.	367
5.2.2 Analiza stabilității locale	367
5.2.3 Analiza sensibilității. Bifurcații Hopf.....	370
5.2.4 Atractori stranii: fluturele Lorenz.	372
5.2.5 Comportamentul haotic	373
5.3 Aplicație economică: migrația urbană - comportamentul haotic.....	375
5.3.1 Formularea modelului dinamic.....	375
5.3.2 Izomorfismul cu modelul Lorenz.	377
5.4 Modelul Hénon.....	378
5.4.1 Formularea modelului.....	378
5.4.2 Analiza modelului Hénon	379
5.4.3 Exponenții Lyapunov și comportamentul haotic	384
5.4.4 Dimensiunea Hausdorff a atractorului	387

Capitolul 6

6 METODE TOPOLOGICE DE CERCETARE A COMPORTAMENTULUI HAOTIC.....

HAOTIC.....	391
6.1 Atractori stranii și fractali. Dimensiunea fractală.....	391
6.2 Exemple de fractali.....	392
6.2.1 Mulțimea Contor.....	392
6.2.2 Mulțimea Koch	393
6.2.3 Triunghiul Sierpinski	394
6.2.4 Tetraedrul Sierpinski	395
6.2.5 Curba Peano.....	395
6.2.6 Triunghiul Sierpinski generat aleatoriu	396
6.3 Metode de comensurare a dimensiunii fractale	396
6.3.1 Metoda „box - counting” (B.C.): numărul de „cutii” de acoperire. Exemple ..	397
6.3.2 Metoda dimensiunii de corelație (Dc). Exponentul corelației	400
6.4 Serii dinamice; reconstituirea atractorului	404
6.4.1 Algoritm de prelucrare a datelor.....	404
6.4.2 Determinarea „dimensiunii de includere” și a întârzierii („time delay”)	408
6.4.3 Estimarea necesarului de date. Modelul Smith.....	409
6.4.4 Aplicație: Estimarea dimensiunii fractale a atractorului Lorenz.....	412
6.4.5 Dimensiunea fractală a atractorului Hénon.....	416
6.5 Analiza R/S. Coeficientul Hurst.....	418

6.6 Teste de validare a neliniarității	421
6.6.1 Testul BDS	422
6.6.2 Testul HP	425

Capitolul 7

7 DINAMICA PIEȚEI VALUTARE.....	429
7.1 Cadrul axiomatic al modelului de bază: Modelul Mussa	429
7.2 Modele structurale ale ratei de schimb	433
7.2.1 Modele monetare cu prețuri flexibile (Frenkel; Bilson)	433
a) Echilibrul pe piața monetară	433
b) Condiția de paritate a ratelor debitantilor (PRD)	433
c) Paritatea puterii de cumpărare.....	434
d) Variabila fundamentală.....	434
7.2.2 Modelul monetar cu prețuri fixe (Dornbusch)	436
7.2.3 Modelul portofoliului echilibrat (McKinnon; Oates).....	437
7.3 Teste empirice pentru predicția ratei de schimb	438
7.3.1 Modele econometrice	438
7.3.2 Modele aleatoare.....	439
7.4 Structura operatorilor pe piața valutară: fundamentaliștii și chartiștii.....	440
7.4.1 Mecanisme feedback de predicție	441
7.4.2 Modele de predicție folosite de chartiști	442
7.4.3 Mecanismul de predicție folosit de fundamentaliști	444
7.5 Modelul de predicție al ratei de schimb	446
7.5.1 Cicluri limită. Evoluția haotică.....	446
7.5.2 Senzitivitatea la condițiile inițiale (SCI) și predictibilitatea pe TS.....	448
7.6 Un model simplificat al dinamicii ratelor de schimb, cu evidențierea haosului	451
7.6.1 Analiza dinamicii în spațiul fazelor (de la cicluri limită la haos)	451
7.6.2 Trei tipuri de atractori strani	454
7.6.3 Analiza cantitativă a comportamentului haotic.....	457
7.7 Modelul monetar: feedbackul de endogenizare a variabilei fundamentale	460
7.7.1 Structura variabilei fundamentale	460
7.7.2 Structura așteptărilor asupra ratei de schimb	462
7.7.3. Simularea evoluției: existența haosului	463
7.7.4 Modelul monetar cu ajustarea ratei dobânzii	466

Capitolul 8

8 TEORII ȘI MODELE ALE CICLURILOR ECONOMICE.....	469
8.1 Teorii asupra ciclurilor economice	469
8.1.1 Dificultăți în abordarea teoretică și empirică	469
8.1.2 Cicluri economice: clasificarea Schumpeter.....	473
8.2 Modele ale ciclurilor economice. Tipologie.....	474
8.3 Cilcuri induse de acumulare a capitalului. Modelul Kaldor	476
8.3.1 Cadrul axiomatic. Analiza grafică	477
8.3.2 Abordarea formalizată a dinamicii	481
8.3.3 Modelul Kaldor cu deprecierea capitalului (δ)	
8.4 Modele de tip Goodwin ale ciclurilor economice	492
8.4.1 Modelul Samuelson al ciclicității acumulării capitalului.....	494
8.4.2 Modelul Goodwin – Samuelson. Cicluri închise	502
8.4.3 Modelul Solow – Goodwin.....	512

8.4.4 Variantă a modelului Solow – Goodwin.....	517
8.4.5 Sinteza modelului Goodwin – Harod. Efectul progresului tehnic neutral	519
8.5 Modelul Benassy: interacțiunea salarii – cerere anticipată.....	526
8.5.1 Formularea modelului.....	526
8.5.2 Analiza în spațiul fazelor.....	530
8.5.3 Studiu de caz.....	533
8.6 Modelul Nordhaus: cicluri incluse de mediul politic (alegeri electorale).....	539
8.7 Cicluri induse de șocuri aleatoare	543
8.8 Cicluri limită induse de așteptările inflaționiste	548
8.8.1 Modelul Sargent – Wallace (S – W).....	548
8.8.2 Studii de caz	554
8.8.3 Predicția perfectă. Sinteza cu modelul Kaldor.....	557
8.9 Modelul Philips aplicat politicilor guvernamentale de stabilizare	
a evoluției cererii excedentare	560
8.9.1 Efectele politicii de stabilizare proporțională	565
8.9.2 Politica de stabilizare diferențială.....	566
8.9.3 Politica de stabilizare integrală.....	568
8.9.4 Politici de stabilizare mixte	569
a) Politica de stabilizare proporțional – diferențială.....	569
b) Politica de stabilizare proporțional – integrală.....	570
8.9.5 Studiu de caz și aplicații propuse.....	571
BIBLIOGRAFIE	577